ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 47 Межвузовский сборник научных трудов 2015

517.9:531.31

И.Е. Полосков

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
polosk@psu.ru; (342) 2-396-560

О СТОХАСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

Рассматривается задача о моделировании вероятностного поведения систем, описываемых линейными стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных с параметрическими возмущениями. Построены уравнения для функций математического ожидания и ковариаций неизвестного векторного случайного поля.

Ключевые слова: моделирование, стохастическое дифференциальное уравнение, стохастический анализ, частная производная, уравнения для моментных функций.

Введение

Случайные явления в распределенных системах (системах с бесконечным числом степеней свободы) уже длительное время привлекают значительный интерес исследователей. Например, большое

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-96019).

число работ посвящено: а) анализу общих классов стохастических систем с распределенными параметрами [1, 2]; случайных колебаний в упругих стержнях [3,4], напряженно-деформируемого состояния и вибраций пластин и оболочек [5], машиностроительных конструкций [6]; б) изучению случайного деформирования и колебаний в упруго-пластических материалах [7], распространения волн (в том числе сейсмических) в случайно-неоднородных средах [8–11], изменения статистических характеристик полей в гидромеханике [12,13]; в) различным другим приложениям [14] и др.

При изучении линейных систем с распределенными параметрами, как правило, ограничиваются методами корреляционного анализа [5]. При анализе же нелинейных объектов одним из наиболее часто применяемых подходов является моделирование движений таких систем на основе теории векторных марковских процессов. Но для использования этой теории требуется предварительная дискретизация задачи (обычно используются различные конечно-разностные схемы, методы Галеркина с разложением по формам свободных упругих колебаний и Фурье) и в дальнейшем редукция моделей к системам с конечным числом степеней свободы, что вносит в задачу необратимую погрешность [5].

Другим инструментом решения подобных задач является использование характеристических функционалов (ХФ) как инструмента анализа случайных полей [8]. Эта методика здесь состоит в выводе уравнений для ХФ в функциональных производных, а затем, после представления ХФ в виде ряда по моментам искомых случайных полей, в построении бесконечной цепочки зацепляющихся уравнений для этих моментов. Но данная методика сложна, громоздка и плохо приспособлена для решения практических задач.

Естественно, нельзя забыть и о такой универсальной расчетной процедуре как метод Монте-Карло (статистического моделирования), но, как известно, при ее использовании для достижения требуемой точности результатов необходимы значительные затраты времени центрального процессора компьютера.

Поэтому одним из современных подходов к анализу стохастических явлений в сплошной среде является применение теории марковских случайных процессов, в частности, для построения уравнений в частных производных для моментных функций случайных характеристик распределенных систем без использования понятия

ХФ в предположении, что флуктуационные случайные поля принадлежат к классу временны́х белых шумов.

Ниже на основе использования обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК-уравнения) для функционала плотности вероятности [15, 16] векторного случайного поля, описываемого системой линейных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных (СДУвЧП) Стратоновича со случайными параметрическими возмущениями, строятся уравнения в частных производных, которые управляют поведением первых моментных функций для неизвестных полей, удовлетворяющих этим уравнениям.

1. Постановка задачи

Пусть система с распределенными параметрами описывается системой стохастических дифференциальных уравнений с частными производными в смысле Стратоновича [17–19] следующего вида:

$$dU_k(\boldsymbol{x},t) = \Big\{\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} q_{ksij}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} q_{ksi}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + q_{ks}(t)\,U_s(\boldsymbol{x},t)\Big] + q_k(t)\Big\}dt + \sum_{\ell=1}^{m}\Big[\!\!\Big[\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{k\ell sij}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} r_{k\ell si}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + r_{k\ell s}(t)\,U_s(\boldsymbol{x},t)\Big] + r_{k\ell}(t)\Big]\!\!\Big] \circ dW_\ell(t) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t_0) = \boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}), \qquad (2)$$

где t – время ($t > t_0$); $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор пространственных координат; $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = \{U_1(\boldsymbol{x},t), U_2(\boldsymbol{x},t), ..., U_d(\boldsymbol{x},t)\}^\top$ – неизвестное векторное случайное поле; $\boldsymbol{U}_0(\boldsymbol{x}) = \{U_{01}(\boldsymbol{x}), U_{02}(\boldsymbol{x}), ..., U_{0d}(\boldsymbol{x})\}^\top$ – векторное случайное поле с известными характеристиками; $\boldsymbol{W}(t) = \{W_1(t), W_2(t),\ ...,\ W_m(t)\}^\top$ – стандартный векторный винеровский процесс с независимыми компонентами:

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{W}(t)] \equiv \langle \boldsymbol{W}(t) \rangle = 0,$$

$$\mathcal{E}[dW_i(t)\,dW_j(t')] = \delta(t-t')\,\delta_{ij}\,dt;$$

q_{ksij}, q_{ksi}, q_{ks}, q_k, $r_{k\ell sij}$, $r_{k\ell si}$, $r_{k\ell s}$, $r_{k\ell}$ – заданные неслучайные непрерывные функции аргумента t; $\top$, $\mathcal{E}$ и δ_{ij} – символы транспонирования, математического ожидания и Кронекера соответственно; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака.

Задачей исследования является построение уравнений для одноточечных первых моментов векторного случайного поля $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)$:

$$\mathcal{E}[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)] \equiv \boldsymbol{m}_U(\boldsymbol{x},t) = \{m_{Uk}(\boldsymbol{x},t),\ k=1,2,...,d\}^\top,$$

$$\mathcal{E}\Big[\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t)\,\boldsymbol{U}^\top(\boldsymbol{y},t)\Big] \equiv \mathcal{R}_U(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t) = \{\rho_{Ukj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t),\ k,j=1,2,...,d\}.$$

2. Инструмент анализа случайных полей

Рассмотрим общую систему СДУвЧП в смысле Стратоновича вида

$$d\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U},\boldsymbol{x},t)\,dt + G(\boldsymbol{U},\boldsymbol{x},t)\circ d\boldsymbol{W}(t), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{f}(\cdot,\cdot,\cdot) = \{f_k(\cdot,\cdot,\cdot),\ k=1,2,...,d\}^\top$, $G(\cdot,\cdot,\cdot) = \{g_{k\ell}(\cdot,\cdot,\cdot),\ k=1,2,...,d, \ell=1,2,...,m\}$ – детерминированные функции своих аргументов, а остальные обозначения те же, что и выше. В этом случае функционал плотности вероятности $\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)$ будет удовлетворять одной из форм обобщенного ФПК-уравнения [16]

$$\frac{\partial\mathbb{P}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{d}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta\big[a_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},t)\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)\big]}{\delta u_k(\boldsymbol{x},t)}\,d\boldsymbol{x}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{d}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta^2\big[b_{kj}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,t)\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)\big]}{\delta u_k(\boldsymbol{x}_1,t)\,\delta u_j(\boldsymbol{x}_2,t)}\,d\boldsymbol{x}_1\,d\boldsymbol{x}_2 \equiv \widehat{\boldsymbol{L}}\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t), \tag{4}$$

где коэффициенты сноса и диффузии вычисляются из соотношений [16]

$$a_k = f_k + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{d}\sum_{\ell=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta g_{k\ell}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t)}{\delta u_\nu(\boldsymbol{x},t)}\,g_{\nu\ell}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},t)\,d\boldsymbol{x}, \tag{5}$$

$$b_{kj} = \sum_{\ell=1}^{m} g_{k\ell}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t)\,g_{j\ell}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},t), \tag{6}$$

которые могут быть получены из обычных формул Стратоновича [18] с помощью перехода от дискретного вектора состояния к непрерывному и замены конечных сумм на интегралы по соответствующей области ($\delta F/\delta v$ – обозначение вариационной производной).

Используя уравнение (4), можно построить систему уравнений в частных производных для функций математического ожидания

$$\frac{\partial m_{Uk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \int u_k(\boldsymbol{x},t)\,\widehat{\boldsymbol{L}}\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)\,d\boldsymbol{u} = \int a_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)\,d\boldsymbol{u} \quad (7)$$

и (смешанных) вторых начальных моментов

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_{Uk\jmath}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial t} &= \int u_k(\boldsymbol{x},t)\,u_\jmath(\boldsymbol{y},t)\,\widehat{\boldsymbol{L}}\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)\,d\boldsymbol{u} = \\ &= \int \big[u_k(\boldsymbol{x},t)\,a_\jmath(\boldsymbol{u},\boldsymbol{y},t) + u_\jmath(\boldsymbol{y},t)\,a_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},t) + \\ &\qquad + b_{k\jmath}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)\big]\,\mathbb{P}(\boldsymbol{u},t)\,d\boldsymbol{u}, \quad (8)\end{aligned}$$

где $k, \jmath = 1, 2, ..., d$.

3. Вывод уравнений для первых моментов

Запишем уравнения (1) в виде

$$dU_k(\boldsymbol{x},t) = f_k\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{x},t\big)\,dt + \sum_{\ell=1}^{m} g_{k\ell}\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{x},t\big) \circ dW_\ell(t), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}f_k = \sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} q_{ksij}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} q_{ksi}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + q_{ks}(t)\,U_s(\boldsymbol{x},t)\Big] + q_k(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g_{k\ell} = \sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{k\ell sij}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{n} r_{k\ell si}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i} + r_{k\ell s}(t)\,U_s(\boldsymbol{x},t)\Big] + r_{k\ell}(t).\end{aligned}$$

Обозначим через $\widehat{f}_k\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{x},t\big)$ выражение

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{\nu=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\delta g_{k\nu}\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{y},t\big)}{\delta U_p(\boldsymbol{x},t)}\,g_{p\nu}\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{y},t\big)\,d\boldsymbol{y}.$$

Для получения явного вида соотношения для $\widehat{f}_k$ вычислим вариационную производную под знаком интеграла:

$$\frac{\delta g_{k\nu}\big(\boldsymbol{U},\boldsymbol{y},t\big)}{\delta U_p(\boldsymbol{x},t)}=\frac{\delta}{\delta U_p(\boldsymbol{x},t)}\Bigg[\!\!\Bigg[\sum_{s=1}^{d}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}r_{k\nu s\lambda\mu}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{y},t)}{\partial y_\lambda\partial y_\mu}+$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{n}r_{k\nu s\lambda}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{y},t)}{\partial y_\lambda}+r_{k\nu s}(t)\,U_s(\boldsymbol{y},t)\Bigg]+r_{k\nu}(t)\Bigg]\!\!\Bigg]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}r_{k\nu p\lambda\mu}(t)\,\frac{\partial^2\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\partial y_\lambda\partial y_\mu}+\sum_{\lambda=1}^{n}r_{k\nu p\lambda}(t)\,\frac{\partial\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\partial y_\lambda}+$$

$$+\,r_{k\nu p}(t)\,\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}).$$

Тогда

$$\widehat{f}_k=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{\nu=1}^{m}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}r_{k\nu p\lambda\mu}(t)\,\frac{\partial^2\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\partial y_\lambda\partial y_\mu}+$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{n}r_{k\nu p\lambda}(t)\,\frac{\partial\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{\partial y_\lambda}+r_{k\nu p}(t)\,\delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\Bigg]\times$$

$$\times\Bigg[\!\!\Bigg[\sum_{s=1}^{d}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{y},t)}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{y},t)}{\partial y_i}+$$

$$+\,r_{p\nu s}(t)\,U_s(\boldsymbol{y},t)\Bigg]+r_{p\nu}(t)\Bigg]\!\!\Bigg]\,d\boldsymbol{y},$$

или

$$\widehat{f}_k=\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{\nu=1}^{m}\Bigg[\!\!\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n}r_{k\nu p\lambda\mu}(t)\,\sum_{s=1}^{d}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^4 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_\lambda\partial x_\mu}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial^3 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i\partial x_\lambda\partial x_\mu}+r_{p\nu s}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\lambda\partial x_\mu}\Bigg]-$$

$$
-\sum_{\lambda=1}^{n} r_{k\nu p\lambda}(t) \sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^3 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\lambda}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_\lambda}+r_{p\nu s}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\lambda}\Big]+
$$

$$
+\,r_{k\nu p}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^2 U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial U_s(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+r_{p\nu s}(t)\,U_s(\boldsymbol{x},t)\Big]+r_{k\nu p}(t)\,r_{p\nu}(t)\Big]\!\Big].
$$

Теперь, используя уравнение (7), строим уравнения для функций математического ожидания:

$$
\frac{\partial m_{Uk}(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} q_{ksij}(t)\,\frac{\partial^2 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n} q_{ksi}(t)\,\frac{\partial m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+q_{ks}(t)\,m_{Us}(\boldsymbol{x},t)\Big]+q_k(t)+
$$

$$
+\,\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{\nu=1}^{m}\Big[\!\Big[\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} r_{k\nu p\lambda\mu}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^4 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\lambda \partial x_\mu}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial^3 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_\lambda \partial x_\mu}+r_{p\nu s}(t)\,\frac{\partial^2 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}\Big]-
$$

$$
-\sum_{\lambda=1}^{n} r_{k\nu p\lambda}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^3 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_\lambda}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial^2 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_\lambda}+r_{p\nu s}(t)\,\frac{\partial m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_\lambda}\Big]+
$$

$$
+\,r_{k\nu p}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^2 m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i \partial x_j}+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial m_{Us}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+r_{p\nu s}(t)\,m_{Us}(\boldsymbol{x},t)\Big]+r_{k\nu p}(t)\,r_{p\nu}(t)\Big]\!\Big], \qquad (10)
$$

$$m_{Uk}(\boldsymbol{x}, t_0) = \mathcal{E}[U_{0k}(\boldsymbol{x})], \qquad k = 1, 2, ..., d. \tag{11}$$

Уравнения для компонент матрицы $\mathcal{R}_U(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$ могут быть получены следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_{Uk\jmath}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial t} = H_{1k\jmath} + H_{2k\jmath} + H_{3k\jmath}, \tag{12}$$

где

$$H_{1k\jmath} = \sum_{s=1}^{d} \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} q_{\jmath sij}(t)\, \frac{\partial^2 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i \partial y_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} q_{\jmath si}(t)\, \frac{\partial \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i} + q_{\jmath s}(t)\, \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \Big] + q_\jmath(t) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{d} \sum_{\nu=1}^{m} \Big[\!\Big[\frac{1}{2} \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} r_{\jmath\nu p\lambda\mu}(t) \sum_{s=1}^{d} \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\, \frac{\partial^4 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_\lambda \partial y_\mu} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\, \frac{\partial^3 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i \partial y_\lambda \partial y_\mu} + r_{p\nu s}(t)\, \frac{\partial^2 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_\lambda \partial y_\mu} \Big] -$$
$$- \sum_{\lambda=1}^{n} r_{\jmath\nu p\lambda}(t) \sum_{s=1}^{d} \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\, \frac{\partial^3 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i \partial y_j \partial y_\lambda} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\, \frac{\partial^2 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i \partial y_\lambda} + r_{p\nu s}(t)\, \frac{\partial \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_\lambda} \Big] +$$
$$+ r_{\jmath\nu p}(t) \sum_{s=1}^{d} \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\, \frac{\partial^2 \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i \partial y_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\, \frac{\partial \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial y_i} + r_{p\nu s}(t)\, \rho_{Uks}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \Big] + r_{\jmath\nu p}(t)\, r_{p\nu}(t) \Big]\!\Big],$$

$$H_{2k\jmath} = \sum_{s=1}^{d} \Big[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} q_{ksij}(t)\, \frac{\partial^2 \rho_{Us\jmath}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial x_i \partial x_j} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} q_{ksi}(t)\, \frac{\partial \rho_{Us\jmath}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)}{\partial x_i} + q_{ks}(t)\, \rho_{Us\jmath}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \Big] + q_k(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{d}\sum_{\nu=1}^{m}\Big[\!\!\Big[\frac{1}{2}\sum_{\lambda,\mu=1}^{n} r_{k\nu p\lambda\mu}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^4\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_\lambda\partial x_\mu}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial^3\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_i\partial x_\lambda\partial x_\mu}+r_{p\nu s}(t)\,\frac{\partial^2\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_\lambda\partial x_\mu}\Big]-$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{n} r_{k\nu p\lambda}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^3\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_\lambda}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial^2\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_i\partial x_\lambda}+r_{p\nu s}(t)\,\frac{\partial\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_\lambda}\Big]+$$

$$+r_{k\nu p}(t)\sum_{s=1}^{d}\Big[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} r_{p\nu sij}(t)\,\frac{\partial^2\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_i\partial x_j}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} r_{p\nu si}(t)\,\frac{\partial\rho_{Usj}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_i}+r_{p\nu s}(t)\,U_s(\boldsymbol{x},t)\Big]+r_{k\nu p}(t)\,r_{p\nu}(t)\Big]\!\!\Big],$$

$$H_{3kj}=\sum_{\ell=1}^{m}\Big[\!\!\Big[r_{k\ell}(t)\,r_{j\ell}(t)+\sum_{s_1=1}^{d}\sum_{s_2=1}^{d}\Big[r_{k\ell s_1}(t)\,r_{j\ell s_2}(t)\,\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)+$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i_1,j_1,i_2,j_2=1}^{n} r_{k\ell s_1i_1j_1}(t)\,r_{j\ell s_2i_2j_2}(t)\,\frac{\partial^4\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_{i_1}\partial x_{j_1}\partial y_{i_2}\partial y_{j_2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i_1,i_2,j_2=1}^{n} r_{k\ell s_1i_1}(t)\,r_{j\ell s_2i_2j_2}(t)\,\frac{\partial^3\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_{i_1}\partial y_{i_2}\partial y_{j_2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i_1,j_1,i_2=1}^{n} r_{k\ell s_1i_1j_1}(t)\,r_{j\ell s_2i_2}(t)\,\frac{\partial^3\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_{i_1}\partial x_{j_1}\partial y_{i_2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i_1,j_1=1}^{n} r_{k\ell s_1i_1j_1}(t)\,r_{j\ell s_2}(t)\,\frac{\partial^2\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_{i_1}\partial x_{j_1}}+$$

$$+\sum_{i_1,i_2=1}^{n} r_{k\ell s_1i_1}(t)\,r_{k\ell s_2i_2}(t)\,\frac{\partial^2\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_{i_1}\partial y_{i_2}}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i_2,j_2=1}^{n} r_{k\ell s_1}(t)\,r_{j\ell s_2i_2j_2}(t)\,\frac{\partial^2\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial y_{i_1}\partial y_{j_1}}+$$

$$
+\sum_{i_1=1}^{n} r_{k\ell s_1 i_1}(t)\, r_{\jmath\ell s_2}(t)\,\frac{\partial\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial x_{i_1}}+
$$

$$
+\sum_{i_2=1}^{n} r_{k\ell s_1}(t)\, r_{\jmath\,\ell s_2 i_2}(t)\,\frac{\partial\rho_{Us_1s_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t)}{\partial y_{i_2}}\Bigg]+
$$

$$
+\,r_{\jmath\,\ell}(t)\sum_{s_1=1}^{d}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i_1,j_1=1}^{n} r_{k\ell s_1 i_1 j_1}(t)\,\frac{\partial^2 m_{Us_1}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_{i_1}\partial x_{j_1}}+
$$

$$
+\sum_{i_1=1}^{n} r_{k\ell s_1 i_1}(t)\,\frac{\partial m_{Us_1}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_{i_1}}+r_{k\ell s_1}(t)\, m_{Us_1}(\boldsymbol{x},t)\Bigg]+
$$

$$
+\,r_{k\ell}(t)\sum_{s_2=1}^{d}\Bigg[\frac{1}{2}\sum_{i_2,j_2=1}^{n} r_{\jmath\,\ell s_2 i_2 j_2}(t)\,\frac{\partial^2 m_{Us_2}(\boldsymbol{y},t)}{\partial y_{i_2}\partial y_{j_2}}+
$$

$$
+\sum_{i_2=1}^{n} r_{\jmath\ell s_2 i_2}(t)\,\frac{\partial m_{Us_2}(\boldsymbol{y},t)}{\partial y_{i_2}}+r_{\jmath\ell s_2}(t)\, m_{Us_2}(\boldsymbol{y},t)\Bigg]\ \Bigg]\!\!\Bigg],
$$

причем в качестве начальных условий необходимо использовать соотношения

$$
\rho_{Uk\jmath}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},t_0)=\mathcal{E}[U_{0k}(\boldsymbol{x})\,U_{0\jmath}(\boldsymbol{y})],\qquad k,\jmath=1,2,...,d. \tag{13}
$$

С другой схемой решения подобной задачи можно ознакомиться в работе [20].

Заключение

Итак, системы уравнений (10), (12) с начальными условиями (11), (13) обеспечивают полное решение поставленной стохастической задачи. Несмотря на громоздкость правых частей этих уравнений, структура их прозрачна и при внимательном подходе без труда может быть использована для анализа конкретных проблем.

Библиографический список

1. *Розанов Ю.А.* Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. М.: Наука, 1995. 256 с.

2. *Hoden H., Oksedental B., Uboe J., Tusheng Z.* Stochastic partial differential equations: A modeling, white noise functional approach. Basel: Birkhauser, 1996. 231 p.

3. *Светлицкий В.А.* Случайные колебания механических систем. М.: Машиностроение, 1991. 320 с.

4. *Solnes J.* Stochastic processes and random vibrations: Theory and practice. New York: John Wiley & Sons, 1997. 432 p.

5. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. М.: Стройиздат, 1982. 351 с.

6. *Николаенко Н.А., Ульянов С.В.* Статистическая динамика машиностроительных конструкций. М.: Машиностроение, 1977. 368 с.

7. *Пальмов В.А.* Колебания упруго-пластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.

8. *Кляцкин В.И.* Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.

9. *Кляцкин В.И.* Динамика стохастических систем: Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 240 с.

10. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. В 2-х т. М.: Мир, 1980. Т. 1. 280 с.; 1981. Т. 2. 317 с.

11. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. М.: Наука, 1966. 404 с.

12. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. В 2-х ч. М.: Наука, 1965. Ч. 1. 640 с.; 1967. Ч. 2. 720 с.

13. *Albeverio S., Flandoli F., Sinai Ya.G.* SPDE in hydrodynamic: Recent progress and prospects: Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, Italy. Berlin: Springer-Verlag, 2008. 182 p.

14. Stochastic partial differential equations and applications / G.Da Prato, L.Tubano (eds.). New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. 476 p.

15. *Шмелев А.Б.* Основы марковской теории нелинейной обработки случайных полей. М.: Изд-во МФТИ, 1998. 208 с.

16. *Полосков И.Е.* Расчет первых моментов случайной концентрации вещества речного загрязнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. VII, № 2 (18). С. 103–110.

17. *Duan J., Wang W.* Effective dynamics of stochastic partial differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2014. XI, 270 p.

18. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Случайные процессы в нелинейных динамических системах. Аналитические и численные методы исследования. Ижевск: РХД, 2001. 160 с.

19. *Маланин В.В., Полосков И.Е.* Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах: учеб. пособие. Ижевск: РХД, 2005. 296 с.

20. *Chow P.-L.* Stochastic partial differential equations. Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, LLC 2015. XV, 314 p.